Naozaj platí, že čím rýchlejší, tým ťažší?

Priznávame, že celkom náhodou sa nám dostalo do rúk minuloročné septembrové číslo časopisu Quark. Z jeho obsahu nás zarazil už samotný názov článku pána Petra Kluvánka, ktorý znel: '*Čím rýchlejší, tým ťažší...*'. Prečo nás to zarazilo? Nuž, pretože to nie je pravda! Po podrobnejšom preskúmaní článku sa naše podozrenie, že si autor mylne vykladá niektoré zásadné pojmy (hlavne pojem hmotnosti) zo špeciálnej teórie relativity, potvrdilo.

Treba hneď spočiatku podtrhnúť, že sa jedná o tému, ktorá sa aj medzi fyzikmi veľmi často zle traktuje, a to aj medzi špecialistami, dokonca aj medzi nositeľmi Nobelovej ceny! Príkladov je hodne - stačí sa pozrieť do cca 90% učebníc špeciálnej teórie relativity. Mylný výklad pojmu hmotnosť čitateľ nájde napr. v knižke W. Pauliho 'Teória relativity', alebo vo Feynmanových kurzoch fyziky a pod. Chybný výklad je aj v knižke nestora českej modernej fyziky prof. Votrubu, k posledným príkladom, ktoré sme 'zaregistrovali', patrí napr. článok pána Wágnera z 'Neviditeľného psa', populárneho českého internetového časopisu, z minulého roka, kde ináč veľmi pekne popisuje narušenie chirálnej symetrie, alebo pomerne dobre napísaná knižka špecialistu z teórie strún B. Greena 'Elegantný Vesmír', ktorá vyšla aj v českom jazyku. [1] Preto neudivuje, že pojem hmotnosť a známy Einsteinov vzťah medzi hmotnosťou telesa a jeho energiou sa častokrát nesprávne vyučuje (a traktuje) nielen na stredných školách, ale aj na univerzitách, dokonca aj na špecializovaných katedrách fyziky. Týmto príspevkom snáď prispejeme u nás doma k náprave v ponímaní týchto vzťahov.

Naše argumentácie budú predovšetkým vychádzať z prác prof. Okúňa z Ústavu teoretickej a experimentálnej fyziky Ruskej akadémie vied z Moskvy, ktorý je v tejto oblasti považovaný za svetovú špičku.

Téma hmotnosť je dnes vysoko aktuálna hlavne preto, lebo hlavným cieľom experimentov ATLAS a CMS na urýchľovači protibežných zväzkov protónov (LHC - z anglického 'Large Hadron Collider') v CERN, Švajčiarsko, je práve poodhaliť rúško jej tajomstva. Dodnes máme len teoretickú predstavu, na základe ktorej usudzujeme, prečo daná častica má práve takú hmotnosť, akú pozorujeme.
Skôr, ako sa zastavíme pri komentovaní článku pána Kluvánka, začnime menšou exkurziou do histórie hmotnosti:
V dobe Galilea Galileiho pojem **hmotnosť** ako taký neexistoval, existoval však pojem **váha**. Po prvý raz sa **hmotnosť** objavuje v prácach Isaaca Newtona, ktorý zavádza hneď dve hmotnosti - inerciálnu m_i a gravitačnú m_g. *Inerciálna hmotnosť telesa je miera jeho inercie (zotrvačnosti).* Hmotnosť m_i telesa teda je veličina, ktorá je definovaná ako konštanta úmernosti medzi silou a zrýchlením, ktoré táto sila vyvolala. Šlo teda o veličinu, ktorá sa v každom okamihu zachovávala. Matematicky: ak $\vec{F}$ je sila a $\vec{a}$ je zrýchlenie, ktoré táto sila vyvolala, potom $\vec{F} = m_i \cdot \vec{a}$. Keďže $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, kde $\vec{p}$ je hybnosť telesa a t je čas, existuje ekvivalentný vzťah, a to medzi hybnosťou $\vec{p}$ a rýchlosťou $\vec{v}$ telesa: $\vec{p} = m_i \cdot \vec{v}$.

Gravitačná hmotnosť je zdrojom vzájomného gravitačného pôsobenia medzi hmotnými objektami. Ak ma teleso A hmotnosť m_g^A a teleso B hmotnosť m_g^B, potom sa podľa Newtona priťahujú silou $\vec{F_g} = G \cdot \frac{m_g^A \cdot m_g^B}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$, kde G je Newtonova gravitačná konštanta a r^2 je štvorec vzdialenosti medzi telesami A a B, jednotkový vektor $\vec{r}/r$ udáva smer pôsobiacej sily.

[1] Viď však recenciu $http://www.physics.rutgers.edu/\sim motl/brian/chyla-greene2.txt$, resp. $http://www.physics.rutgers.edu/\sim motl/brian/greene-chyla.pdf$ na túto knižku od prof. Chýlu.

Poznamenajme, že G je univerzálnou konštantou - predpokladáme, že jej hodnota je rovnaká pre celý náš Vesmír.
Na prvý pohľad vôbec nie je zrejme, aký je vzťah medzi inerciálnou a gravitačnou hmotnosťou. Pokusy maďarského fyzika baróna Loránda Etvösiho ukázali, že sa jedná o tú istú veličinu, teda $m_i = m_g$. Treba však podotknúť, že Etvösiho experiment bol realizovaný len po istú vzdialenosť na seba navzájom pôsobiacich telies (čitateľ si iste ľahko predstaví, aké je problematické meranie gravitačnej sily pri malých vzdialenostiach). Ak by ale budúce experimenty ukázali, že existuje predsa len rozdiel medzi inerciálnou a gravitačnou hmotnosťou, napr. $m_i = \kappa \cdot m_g$, kde κ je nejaká číselná konštanta, z teoretického hľadiska to nebude 'žiadna tragédia', pretože predefinovaním Newtonovej gravitačnej konštanty G na $\rightarrow G' \equiv \kappa \cdot G$ vždy sa dá docieliť ich rovnosť.
Aký je potom vzťah medzi *váhou* a hmotnosťou? Majme na povrchu Zemi teleso o hmotnosti m. Ak M označuje hmotnosť Zeme, potom vzájomne pôsobiaca sila medzi Zemou a telesom m je daná vzťahom $\vec{F}_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$, kde r je polomer Zeme. Zaveďme (gravitačné) zrýchlenie - $\vec{g} \equiv G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$, potom váha W telesa m je rovná $W \equiv |\vec{g}| \cdot m$. *Váha je teda miera gravitačnej sily Zeme.* Je univerzálnou veličinou *len* na Zemi, na inej planéte bude mať inú hodnotu.
V ďalšom bude užitočné zosumarizovať vlastnosti Newtonovej hmotnosti: Newtonova hmotnosť je aditívna (hmotnosť objektu je súčtom hmotností jeho častí), v izolovanom systéme sa zachováva a nezávisí na čase, nemení sa pri prechode z jednej sústavy do druhej, špeciálne, je rovnaká v rôznych inerciálnych sústavach. Z podstaty jej definície plynie, že je mierou inercie (zotrvačnosti) objektu, ku ktorému ju priraďujeme.

Obráťme teraz pozornosť k špeciálnej teórii relativity. Jedným z jej základných predpokladov je tvrdenie, že rýchlosť materiálneho signálu je konečná. Označme túto rýchlosť c. Pripomeňme, že v Newtonovej mechanike takéto ohraničenie neexistuje. Hodnota c je cca $c \sim 3 \cdot 10^8$ m/s. Z požiadavky platnosti Einsteinovho princípu relativity (t.j. nemožnosti rozlíšenia medzi jednotlivými inerciálnymi sústavami) vyplýva platnosť tzv. Lorentzovej transformácie. Zjednodušene povedané, ak sa ohraničíme iba na elektromagnetické žiarenie, ide o vyplnenie podmienky, aby Maxwellove rovnice, popisujúce toto žiarenie, mali v ľubovoľnej inerciálnej sústave *rovnaký* (kovariantný) tvar.

Skúsme sa podrobnejšie pozrieť na Lorentzovu transformáciu. Predstavme si najskôr kruh o polomere r. Nech (x, y) označuje nejaký bod na obvode kruhu. Ak kruhom pootočíme, súradnice bodu (x, y) sa zmenia, no stále bude platiť fakt, že jeho vzdialenosť od stredu kruhu bude rovnaká, nezávislá na rotácii kruhu, teda $x^2+y^2 = r^2$. Náš príklad zovšeobecnime na guľu. Nech (x, y, z) označuje bod na jej povrchu. Opäť, bez ohľadu na rotáciu gule, vždy bude platiť rovnica: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, kde r je polomer gule. Zaveďme ako štvrtú súradnicu čas (presnejšie, aby sme mali rovnaký rozmer ako v prípade priestorových premenných - $c \cdot t$). Jeden z priamych dôsledkov Einsteinovho princípu relativity je platnosť nasledujúcej rovnosti: $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$, resp. $r^2 - c^2t^2 = r'^2 - c^2t'^2$, kde (x, y, z, ct) označujú súradnice nejakého bodu v sústave $\mathcal{O}$ a (x',y',z',ct') označujú súradnice toho istého bodu v čiarkovanej sústave $\mathcal{O}'$, ktorá sa pohybuje voči sústave $\mathcal{O}$ ľubovoľnou konštantnou rýchlosťou $|\vec{v}| \leq c$. Táto rovnosť definuje novú, relativistickú geometriu, ktorá je štvorrozmerná, a ktorá akceptuje vyššie uvedenú rovnosť. Táto geometria bola zavedená hneď po opublikovaní Einsteinom jeho špeciálnej relativity nemeckým matematikom Hermannom Minkowskim, [2] ktorý, aby zabezpečil zmenu znamienka pri časovej súradnici vo vyššie uvedenej rovnosti,

[2]Práve krása, jednoduchosť a elegancia popisu špeciálnej teórie relativity pomocou Minkowského geome-

zaviedol imaginárnu časovú os $\tau \equiv ict$, takže formálne súčin v Minkowského geometrii je rovnaký ako v bežnej, Euklidovej metrike, no imaginárne i zabezpečuje zmenu znamienka pri časovej súradnici. Tu je položený základ dôležitosti pojmu *štvorvektora* A, definovaného súradnicami (A_x, A_y, A_z, A_τ) - veličiny, ktorá sa transformuje v súlade s Lorentzovými transformáciami, v ktorej je definovaný špecifický skalárny súčin: majme napr. dva štvorvektory A a B, potom ich skalárny súčin je $A \cdot B = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z + A_\tau.B_\tau$, alebo ekvivalentne pre reálny čas $A \cdot B = A_x.B_x + A_y.B_y + A_z.B_z - A_{ct}.B_{ct} = invariant$. Štvorec Lorentzovho štvorvektora je preto *vždy* konštantný, *nezávislý* na výberu tej-ktorej inerciálnej suštavy - hovoríme mu *Lorentzov invariant*. Takýmto invariantom je napr. aj rýchlosť svetla vo vákuu, ktorá je totožná s maximálnou rýchlosťou, ktorou sa môže šíriť materiálny signál.

Na rozdiel od klasickej (Newtonovej) fyziky, kde sú energia E a hybnosť $\vec{p}$ *nezávislými* veličinami, v špeciálnej teórii relativity to tak nie je – energiu E a hybnosť $\vec{p}$ je možné napísať v tvare Lorentzovho štvorvektora $P \equiv (p_x, p_y, p_z, i \cdot E/c)$. Keďže P sa transformuje ako Lorentzov štvorvektor, jeho štvorec **musí** byť Lorentzovým invariantom, teda ide o veličinu, ktorá je *v každom inerciálnom systéme rovnaká*: $P \cdot P = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - E^2/c^2 = |\vec{p}|^2 - E^2/c^2 =$ Lorentzov invariant. Fyzikálny rozmer tohto invariantu v sústave SI je $kg^2 \cdot m^2 \cdot s^{-2}$. Prirodzeným kandidátom na rozmer $(m \cdot s^{-1})^2$ je štvorec rýchlosti svetla vo vákuu (ktorý, ako sme už spomenuli, je Lorentzovým invariantom), takže $P \cdot P =$ [veličina s rozmerom kg^2]$\cdot c^2$, a kedže celkový výsledok je Lorentzov invariant, aj [veličina s rozmerom kg^2], čo nie je nič iné, ako štvorec hmotnosti m^2, musí byť Lorentzovým invariantom, a teda aj samotná hmotnosť m musí byť Lorentzovým invariantom, a teda hmotnosť m je *len* **jedna**!

Vyššie uvedená úvaha sa priamo odráža v základných vzťahoch špeciálnej teórie relativity voľne sa pohybujúcej častice, a síce:

$$E^2 - |\vec{p}|^2 \cdot c^2 = m^2 \cdot c^4 \quad , \tag{1}$$

$$\vec{p} = \vec{v} \cdot \frac{E}{c^2} \quad , \tag{2}$$

kde E je energia, $\vec{p}$ je hybnosť, $\vec{v}$ je rýchlosť a m je hmotnosť častice.

V literatúre je možné nájsť pojem *kľudová* alebo *relativistická* hmotnosť. Dúfame, že je už jasné, že tieto pojmy sú **nesprávne**! Podobne nemá veľký význam zavedenie priečnej alebo pozdĺžnej hmotnosti - ide o veličiny, ktoré sa používajú často vo fyzike zrážok relativistických jadier, ich fyzikálny zmysel sa ale viaže k rozdeleniu priečnej a pozdĺžnej energii, a nie k hmotnosti, ktorú obvykle zanedbávajú.

Pre časticu s nulovou hmotnosťou (fotón) z rovnice (1) plynie $|\vec{p}| \cdot c = E$, čo ale podľa (2) znamená, že ak je rýchlosť častice c, jej hmotnosť je nulová a naopak. Pokiaľ skúmame časticu, rýchlosť ktorej je $|\vec{v}| < c$, dosadením (2) do (1) dostaneme

$$E^2(1 - |\vec{v}|^2/c^2) = m^2c^4 \rightarrow E = mc^2/\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2} \tag{3}$$

Zavedením Lorentzovho $\gamma \equiv 1/\sqrt{1-\beta^2}$, kde $\beta \equiv |\vec{v}|^2/c^2$, dostávame 'klasické' vzťahy zo špeciálnej teórie relativity:

$$E = mc^2\gamma \quad \text{a} \quad \vec{p} = m\vec{v}\gamma \tag{4}$$

trie de facto zabezpečila jej pomerne rýchlu akceptáciu vo vedeckom svete.

Vzťah (1) má ešte jeden kľúčový význam. Pokiaľ si zvolíme takú sústavu, v ktorej je častica v kľude, potom dostaneme slávny Einsteinov vzorec

$$E_0 = m \cdot c^2 \tag{5}$$

kde E_0 označuje energiu kľudovej častice. Preto často používaný vzťah $\mathbf{E} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{c^2}$ **nie je správny!**

Tu treba ešte zdôrazniť, že hmotnosť a rýchlosť v špeciálnej teórii relativity majú *rovnaký* význam ako v Newtonovej mechanike. Ukážeme to pre prípad hmotnosti:

Najskôr zaveďme pojem kinetickej energie častice ako rozdiel energie častice v sústave, kde sa pohybuje voči pozorovateľovi s rýchlosťou $\vec{v}$ a energie, kde je voči pozorovateľovi v kľude:

$$E_{kin} \equiv E - E_0 = m \cdot c^2(\gamma - 1) \quad . \tag{6}$$

V priblížení $|\vec{v}|/c \ll 1$ $(\gamma - 1 \approx |\vec{v}|^2/2c^2)$ dostaneme

$$E_{kin} \sim \frac{|\vec{p}|^2}{2m} = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 \quad \text{a} \;\; \vec{p} = m\vec{v} \, , \tag{7}$$

čo sú základné rovnice Newtonovej mechaniky.

Dúfame, že čitateľovi je už jasné, kde spravil autor septembrového čísla Quarku chyby. Opakujeme, hmotnosť je LEN jedna a Einsteinov vzťah viaže energiu prislúchajúcej kľudovej častici k jej hmotnosti. Nie je preto správny ani názov Kluvánekovho článku: kedže hmotnosť je len jedna, nemôže sa meniť pri rastúcej rýchlosti. Správne by jeho titul mohol byť: *Čím rýchlejší, tým energetickejší.*

Doc.RNDr. Dušan Bruncko, CSc. Doc.RNDr. Michal Hnatič, CSc.

Ústav experimentálnej fyziky SAV
Košice