O podgrupách kružnice charakterizovaných konvergenciou postupností a radov

Peter Eliaš

Matematický ústav SAV

Topologické grupy

Definícia

$\langle X, \mathcal{O}, + \rangle$ je *topologická grupa*, ak

- $\langle X, \mathcal{O} \rangle$ je topologický priestor,
- $\langle X, + \rangle$ je grupa,
- operácia $+$ ako funkcia z $X \times X$ do X je spojitá, t. j. ak $x + y = z$ a W je okolie bodu z, tak existujú okolia U, V bodov x, y také, že $U + V \subseteq W$.

Príklady:

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}$ – jednotková kružnica, $\mathbb{T}^2$ – tórus, ...
- topologické vektorové priestory, najmä priestory funkcií
- priestory transformácií s operáciou skladania
- $2^{\mathbb{N}}$ – priestor postupností 0 a 1

Topologické grupy

Niektoré výsledky množinovej topológie opierajúce sa o grupovú štruktúru reálnych čísel:

- (Steinhaus) Ak A je merateľná množina kladnej miery, alebo množina 2. kategórie majúca Bairovu vlastnosť, tak množina $A - A$ obsahuje interval.
- (Galvin, Mycielski, Solovay) A je množina silnej miery 0 práve vtedy, keď pre každú množinu B 1. kategórie platí $A - B \neq \mathbb{R}$.

Grupa $\mathbb{T}$ – jednotková kružnica

$\mathbb{T}$ = faktorová grupa $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$;
$\mathbb{T} \approx$ interval $[0,1]$, v ktorom stotožníme 0 a 1,
grupová operácia – sčítanie modulo 1

Pre $x \in \mathbb{R}$ položme $\|x\| = \min\{|x-k| : k \in \mathbb{Z}\}$;
pri stotožnení prvkov $\mathbb{T}$ a $\mathbb{R}$ dostaneme funkciu definovanú na $\mathbb{T}$.

$\mathbb{T}$ je úplný separabilný metrický priestor,
metrikou je funkcia $\varrho(x,y) = \|x-y\|$.

Pre všetky x, y platí $\|x\| + \|y\| \geq \|x+y\| \geq \|x\| - \|y\|$.

Podgrupy grupy $\mathbb{T}$

Podgrupy grupy $\mathbb{T}$

konečné: sú tvaru $\left\{0, \frac{1}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}\right\}$

spočítateľné: sú generované nekonečnou množinou racionálnych čísel alebo nanajvýš spočítateľnou množinou obsahujúcou iracionálne číslo

nespočítateľné: sú generované nejakou nespočítateľnou množinou

- Každá uzavretá podgrupa $\mathbb{T}$ je konečná.
- Každá merateľná vlastná podgrupa $\mathbb{T}$ má mieru 0.
- Každá vlastná podgrupa s Bairovou vlastnosťou je 1. kategórie.

Podgrupy $\mathbb{T}$ charakterizované konvergenciou

Označenie

Nech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je postupnosť nezáporných reálnych čísel, $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel.

Označme

- $N_{\{a_n\}} = \{x \in \mathbb{T} : \sum a_n \|nx\| < \infty\}$,
- $N_{0,\{n_k\}} = \{x \in \mathbb{T} : \sum \|n_k x\| < \infty\}$,
- $A_{\{n_k\}} = \{x \in \mathbb{T} : \lim \|n_k x\| = 0\}$.

$N_{\{a_n\}}$, $N_{0,\{n_k\}}$, $A_{\{n_k\}}$ sú vlastné podgrupy $\mathbb{T}$.

Podgrupy $\mathbb{T}$ charakterizované konvergenciou

Označenie

Nech $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je postupnosť nezáporných reálnych čísel, $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je rastúca postupnosť prirodzených čísel.
Označme

- $N_{\{a_n\}} = \{x \in \mathbb{T} : \sum a_n \|nx\| < \infty\}$,
- $N_{0,\{n_k\}} = \{x \in \mathbb{T} : \sum \|n_k x\| < \infty\}$,
- $A_{\{n_k\}} = \{x \in \mathbb{T} : \lim \|n_k x\| = 0\}$.

$N_{\{a_n\}}$, $N_{0,\{n_k\}}$, $A_{\{n_k\}}$ sú vlastné podgrupy $\mathbb{T}$. Navyše platí:

- Ak $\lim \frac{n_k}{n_{k+1}} = 0$, tak $A_{\{n_k\}}$ je nespočítateľná.
- Ak $\sum \frac{n_k}{n_{k+1}} = 0$, tak $N_{0,\{n_k\}}$ je nespočítateľná.
- Ak $\sum a_{n_k} = \infty$, $\lim a_{n_k} = 0$, $\sum a_{n_k} \frac{n_k}{n_{k+1}} < \infty$, $a_n = 0$ pre $n \notin \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, tak $N_{\{a_n\}}$ je nespočítateľná.

Trigonometrické tenké množiny

Definícia

Množina $X \subseteq \mathbb{T}$ sa nazýva

- *N-množina*, ak existuje postupnosť nezáporných čísel $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taká, že $\sum a_n = \infty$ a $\sum a_n \|n_k x\| < \infty$ pre všetky $x \in X$,
- *N_0-množina*, ak existuje rastúca postupnosť $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ taká, že $\sum \|n_k x\| < \infty$ pre všetky $x \in X$.
- *Arbaultova množina*, ak existuje rastúca postupnosť $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ taká, že $\lim \|n_k x\| = 0$ pre všetky $x \in X$,
- *Dirichletova množina*, ak existuje rastúca postupnosť $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ taká, že $\|n_k x\| \leq 2^{-k}$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$ a $x \in X$,

Označme $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_0$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ systémy všetkých N-množín, N_0-množín, Arbaultových a Dirichletových množín.
Systémy $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_0$, $\mathcal{A}$ majú bázu tvorenú podgrupami $\mathbb{T}$.

Prípustné množiny

Definícia

Nech $\mathcal{F}$ je systém množín. Množina A sa nazýva $\mathcal{F}$-*prípustná*, ak pre každé $B \in \mathcal{F}$ existuje $C \in \mathcal{F}$ tak, že $A \cup B \subseteq C$.

Nech $Perm(\mathcal{F})$ je systém všetkých $\mathcal{F}$-prípustných množín.

Prípustné množiny

Definícia

Nech $\mathcal{F}$ je systém množín. Množina A sa nazýva $\mathcal{F}$-*prípustná*, ak pre každé $B \in \mathcal{F}$ existuje $C \in \mathcal{F}$ tak, že $A \cup B \subseteq C$.

Nech $Perm(\mathcal{F})$ je systém všetkých $\mathcal{F}$-prípustných množín.

$Perm(\mathcal{F})$ je ideál.

Nech $\mathcal{F}$ má bázu tvorenú podgrupami. Potom

- podmienku $A \cup B \subseteq C$ môžeme nahradiť podmienkou $A + B \subseteq C$,
- $Perm(\mathcal{F})$ má bázu tvorenú podgrupami.

Problém perfektnej prípustnej množiny

Veta (Arbault, Erdös)

Každá spočítateľná množina je $\mathcal{N}$-prípustná.

Problém: existuje perfektná $\mathcal{N}$-prípustná množina?

Problém perfektnej prípustnej množiny

Veta (Arbault, Erdös)

Každá spočítateľná množina je $\mathcal{N}$-prípustná.

Problém: existuje perfektná $\mathcal{N}$-prípustná množina?

- Arbault 1952: áno

Problém perfektnej prípustnej množiny

Veta (Arbault, Erdös)

Každá spočítateľná množina je $\mathcal{N}$-prípustná.

Problém: existuje perfektná $\mathcal{N}$-prípustná množina?

- Arbault 1952: áno
- Bari 1961: ?

Problém perfektnej prípustnej množiny

Veta (Arbault, Erdös)

Každá spočítateľná množina je $\mathcal{N}$-prípustná.

Problém: existuje perfektná $\mathcal{N}$-prípustná množina?

- Arbault 1952: áno
- Bari 1961: ?
- Lafontaine 1969: nie

Problém perfektnej prípustnej množiny

Veta (Arbault, Erdös)

Každá spočítateľná množina je $\mathcal{N}$-prípustná.

Problém: existuje perfektná $\mathcal{N}$-prípustná množina?

- Arbault 1952: áno
- Bari 1961: ?
- Lafontaine 1969: nie
- Bukovský, Repický, Cholščevnikova, Bartoszyński, Scheepers: konštrukcie nespočítateľných $\mathcal{N}$-prípustných množín využívajúce dodatočné predpoklady teórie množín

Problém perfektnej prípustnej množiny

Veta (Arbault, Erdös)

Každá spočítateľná množina je $\mathcal{N}$-prípustná.

Problém: existuje perfektná $\mathcal{N}$-prípustná množina?

- Arbault 1952: áno
- Bari 1961: ?
- Lafontaine 1969: nie
- Bukovský, Repický, Cholščevnikova, Bartoszyński, Scheepers: konštrukcie nespočítateľných $\mathcal{N}$-prípustných množín využívajúce dodatočné predpoklady teórie množín
- Bukovský: hypotéza: $\mathcal{N}$-prípustné množiny sú 1. kategórie v každej perfektnej množine

Problém perfektnej prípustnej množiny

Veta (Arbault, Erdös)

Každá spočítateľná množina je $\mathcal{N}$-prípustná.

Problém: existuje perfektná $\mathcal{N}$-prípustná množina?

- Arbault 1952: áno
- Bari 1961: ?
- Lafontaine 1969: nie
- Bukovský, Repický, Cholščevnikova, Bartoszyński, Scheepers: konštrukcie nespočítateľných $\mathcal{N}$-prípustných množín využívajúce dodatočné predpoklady teórie množín
- Bukovský: hypotéza: $\mathcal{N}$-prípustné množiny sú 1. kategórie v každej perfektnej množine
- Eliaš 2004: $\mathcal{A}$-prípustné množiny sú 1. kategórie v každej perfektnej množine

Problém perfektnej prípustnej množiny

Lafontaine: pre každú perfektnú množinu P existuje Dirichletova množina D taká, že $P + D$ má kladnú Lebesguovu mieru.

Veta (Erdös, Kunen, Mauldin 1981)

Pre každú perfektú množinu P existuje perfektná množina Q miery nula taká, že $P + Q = \mathbb{R}$.

Problém perfektnej prípustnej množiny

Lafontaine: pre každú perfektnú množinu P existuje Dirichletova množina D taká, že $P + D$ má kladnú Lebesguovu mieru.

Veta (Erdös, Kunen, Mauldin 1981)

Pre každú perfektú množinu P existuje perfektná množina Q miery nula taká, že $P + Q = \mathbb{R}$.

Zosilnenie oboch tvrdení:

Veta

Pre každú perfektnú množinu P existuje Dirichletova množina D taká, že $P + D = \mathbb{T}$.

Problém perfektnej prípustnej množiny

Lafontaine: pre každú perfektnú množinu P existuje Dirichletova množina D taká, že $P + D$ má kladnú Lebesguovu mieru.

Veta (Erdös, Kunen, Mauldin 1981)

Pre každú perfektú množinu P existuje perfektná množina Q miery nula taká, že $P + Q = \mathbb{R}$.

Zosilnenie oboch tvrdení:

Veta

Pre každú perfektnú množinu P existuje Dirichletova množina D taká, že $P + D = \mathbb{T}$.

Riešenie problému perfektnej prípustnej množiny

Veta

Nech systém množín $\mathcal{F}$ má bázu tvorenú vlastnými podgrupami $\mathbb{T}$ a obsahuje všetky Dirichletove množiny. Potom neexistuje perfektná $\mathcal{F}$-prípustná množina.

Riešenie problému perfektnej prípustnej množiny

Veta

Nech systém množín $\mathcal{F}$ má bázu tvorenú vlastnými podgrupami $\mathbb{T}$ a obsahuje všetky Dirichletove množiny. Potom neexistuje perfektná $\mathcal{F}$-prípustná množina.

Veta

Nech systém množín $\mathcal{F}$ má bázu tvorenú analytickými vlastnými podgrupami $\mathbb{T}$ a obsahuje všetky Dirichletove množiny. Potom každá $\mathcal{F}$-prípustná množina je 1. kategórie v každej perfektnej množine.